

5. МЕХАНИКАЛЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕР

Теория

Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Теория

Табиғат пен техникада қайталанып отыратын физикалық процестер кездеседі. Тербелістің кез келген ортада таралуын толқын деп атайды. Оларға: дыбыс толқындары, сағат механизмнің жұмысы, тізбектегі айнымалы ток, электромагниттік тербелістер және т.б. жатады.

Периодтық қозғалыс деп әрбір циклі дәлме-дәл кез келген басқа циклін қайталап отыратын қозғалысты атайды. Бір цикл ұзақтығын период деп атайды.

Тербелмелі қозғалысты ерікті және еріксіз деп екіге бөледі. Ерікті қозғалыста сыртқы күштің әсерінсіз өз бетінше қозғалыс циклін қайталап отырады. Мұндай тербелістерді еркін тербелістер деп атайды.

Өз бетінше периодты қозғалыстар жасай алатын немесе тербелетін осы тәрізді денелер немесе денелер жүйесін (материялық нүктелер жиынтығын) тербелмелі жүйелер деп атаймыз.

Тербелмелі нүктенің ығысуының уақытқа тәуелділігін өрнектейтін формуланы тербелмелі қозғалыстың теңдеуі деп атайды. Ол гармоникалық тербеліс теңдеуімен сипатталады.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

Мұндағы ω - тербелмелі қозғалыстың дөңгелек немесе циклдік жиілігі. Нүктенің шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалысы кезінде бұрыштық жылдамдық

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ немесе } \omega = 2\pi\nu$$

өрнектермен өрнектелетін болғандықтан фазалық бұрыш үшін

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T} \text{ немесе } \varphi = 2\pi\nu t \quad (5.2)$$

Механикалық гармоникалық тербелістегі нүктенің жылдамдығы, үдеуі, энергиясы

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.3)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.4)$$

мұндағы $v_{\max} = A\omega$, $a_{\max} = A\omega^2$ - жылдамдық пен үдеу амплитудалары.

Гармоникалық тербелістің дифференциалдық теңдеуі:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (5.5)$$

Материялық нүктенің тұзусызықты гармоникалық тербелісінің кинетикалық энергиясы

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (5.6)$$

Серпимді $F_{сер}$ күштің әсерінен гармоникалық тербеліс жасайтын материялық нүктенің потенциалдық энергиясы:

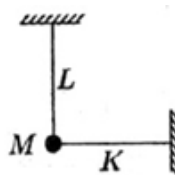
$$E_p = -\int_0^x F_{сер} dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] \quad (5.7)$$

Толық энергия

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2} \quad (5.8)$$

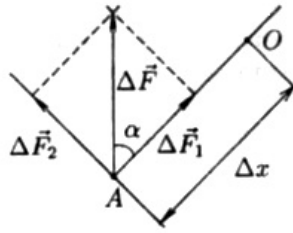
Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

5.1. Массасы M жүк ұзындығы L жіпке ілінген және қатаңдығы k резеңкемен қабырғаға байланған (5.1-сурет). Тепе-теңдік жағдайында резеңке созылмайтын және горизонталь орналасқан. Сурет жазықтығындағы жүктің кіші тербелістерінің периодын табыңыз.



5.1-сурет

Шешімі. Кіші тербелістер кезінде жүктің қозғалыс траекториясын шеңбердің кішкене доғасы деп қабылдап, оны вертикальға α бұрыш жасай бағытталған тұзусызықты кесінді ретінде қарастыруға болады. Δx координатасы қозғалыс траекториясы бойындағы тепе-теңдік жағдайынан аз ауытқу болсын. «Кіші ауытқуды» шамасы жүйенің сипаттамалық өлшемдерінен көп кіші, мысалы, L өзекшенің ұзындығынан көп кіші, ауытқу деп түсіну қажет. Жүктің кіші тербелістерінің үлкейтілген суретін қарастырайық (5.2-сурет).



5.2-сурет

O нүктесі – тепе-теңдік жағдайы. A нүктесі – ығысу жағдайындағы жүк. Тепе-теңдіктен ауытқу кезіндегі қайтарушы күштің қалай туындайтынын түсінуге тырысайық. Кіші ауытқуларда серіппе іс жүзінде вертикаль қалыпта қалады, сондықтан оның ұзаруын былайша есептеуге болады:

$$\Delta l = OA \cdot \cos \alpha = \Delta x \cos \alpha.$$

Бұл жағдайда қосымша серпімділік күші пайда болады:

$$\Delta F = k \Delta l.$$

Бұл күшті екі құраушыға жіктейміз. ΔF_2 күші өзекше бойымен әсер етеді және әрқашан өзекшенің реакция күшімен теңгеріледі. ΔF_1 жүктің қозғалыс бағытымен әсер етеді. Ол күш қарастырылып отырған тербелістердегі кері қайтарушы күш болып табылады. Оны оңай есептеуге болады:

$$\Delta F_1 = \Delta F \cos \alpha = \frac{Mg \cos^2 \alpha}{L \sin \alpha} \cdot \Delta x.$$

Формуладағы Δx алдындағы қайтарушы күшті анықтауға арналған көбейткіш серпімді тербелістер кезінде әрқашанда шынайы (эффektivті) қатаңдық коэффициенті болып табылады:

$$k_{эфф} = \frac{Mg \cos^2 \alpha}{L \sin \alpha}.$$

Енді соңғы жауапты келесідей жазуға болады:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_{эфф}}} = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g}}.$$

Мұндай жүйенің тербелісі екі жартылай периодқа жіктеледі. Жүк резеңке жаққа ауытқығанда резеңке жүкке әсер етпейді және маятник тек қана ауырлық күші әсерінен қозғалады. Бұл жартылай периодтың ұзақтығы белгілі формуламен есептеледі:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Жүк қарама-қарсы жаққа ауытқығанда, резеңке созылады және қайтарушы күш ауырлық және резеңкенің созылу күштері әсерлерінің қосындысы болады:

$$F = -kx - Mg \cdot \frac{x}{L}, \text{ осыдан } \ddot{x} = -\left(\frac{k}{M} + \frac{g}{L}\right) \cdot x,$$

($\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$ – белгіленуі уақыт бойынша екінші туынды, $\dot{x} = a_x$).

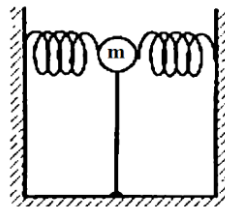
Бұл жартылай периодтағы қозғалыс гармоникалық сипатқа ие, алайда жартылай периоды басқа болады:

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{ML}{kL + Mg}}.$$

Жүк тербелісінің толық периоды екі жартылай периодтардың қосындысы деп анықталады:

$$T = t_1 + t_2 = \pi \left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{ML}{kL + Mg}} \right).$$

5.2. Ұзындығы l вертикаль абсолют қатаң салмақсыз өзекше төменгі нүктеге топсаның көмегімен бекітілген. Өзекшенің жоғарғы ұшына m нүктелік масса бекітілген. Жүйе тепе-теңдік күйді қатандығы k екі бірдей салмақсыз горизонталь серіппе көмегімен ұстайды (5.3-сурет). Жүйені тепе-теңдік жағдайдан шығарған кездегі жүйеде туындайтын кіші тербелістердің периодын табыңыздар.



5.3-сурет

Шешімі: Өзекшені α бұрышқа бұра отырып жүйені тепе-теңдік жағдайынан шығарамыз. Осы кезде m нүктелік масса сәйкесінше горизонталь және вертикаль бағыттарға ығысады:

$$x = l \sin \alpha, \tag{5.2.1}$$

$$y = l (1 - \cos \alpha). \tag{5.2.2}$$

Есептің шарты бойынша α өте кіші болғандықтан, онда $\sin \alpha \approx \alpha$ және $\cos \alpha \approx 1$. Осыларды ескере отырып (5.2.1) және (5.2.2) формулалар мына түрге ие болады:

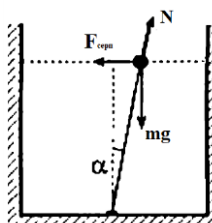
$$x \approx l\alpha, \quad (5.3.3)$$

$$y \approx 0. \quad (5.3.4)$$

Олай болса, кіші тербелістер кезінде нүктелік массаның вертикаль бағыттағы ығысуын ескермеуге болады. Демек, өте жақсы дәлдікпен, α кіші ығысулар кезінде m нүктелік массаға сығылған және созылған серіппелер тарапынан әсер ететін F_1 және F_2 күштер бір бағытта горизонталь бағытталады деп есептеуге болады. Шамалар үшін олардың $F_{серп}$ теңәсерлі күшін былай жазуға болады:

$$F_{серп} = F_1 + F_2 = 2kx. \quad (5.3.5)$$

m массаға F -тен бөлек mg ауырлық күші және N өзекшенің реакция күші әсер етеді (5.4- сурет).



5.4-сурет

Кіші α кезінде дене вертикаль бағытта ығыспайды, демек, массаға түсірілген барлық күштердің F қорытқы күшінің вертикаль бағытқа проекциясы нөлге тең. Осыдан

$$N \cos \alpha \approx N = mg. \quad (5.3.6)$$

Қорытқы күштің горизонталь бағытқа проекциясы

$$F_x(x) = N \sin \alpha - F_{серп} \approx N\alpha - 2kx. \quad (5.3.7)$$

(5.3.3) және (5.3.6) теңдеулердің көмегімен (5.3.7) теңдік мына түрге оңай түрленеді:

$$(5.3.8)$$

$$F_x(x) = -k_1x,$$

мұндағы

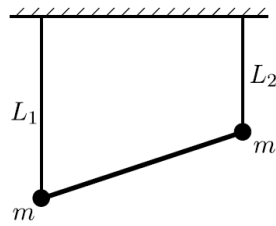
$$k_1 = 2k - mg / l. \quad (5.3.9)$$

Егер $2k > mg / l$, онда $F_x(x)$ тепе-теңдік жағдайына бағытталады және гармоникалық күш болып табылады. Оның әсерінің нәтижесінде периоды төмендегідей кіші гармоникалық тербелістер туындайды:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k_1} = 2\pi\sqrt{ml \cdot (2kl - mg)}.$$

Егер $2k \leq mg/l$, онда тепе-теңдік орнықсыз, өйткені бұл жағдайда $F_x(x)$ не нөлге тең, не тепе-теңдік жағдайдан бағытталады. Бұл жағдайда $F_x(x)$ гармоникалық емес және жүйеде тербелістер туындамайды.

5.3. Массалары m екі жүк көлденең төбеге ұзындығы L_1 және L_2 болатын екі жеңіл салмақсыз жіптер арқылы ілінген. Жүктер жеңіл қатты өзекшемен жалғанған (5.5 - сурет). Тепе-теңдік жағдайында жіптер вертикаль. Сурет жазықтығында жүйенің кіші тербелістерінің периодын анықтаңыздар.

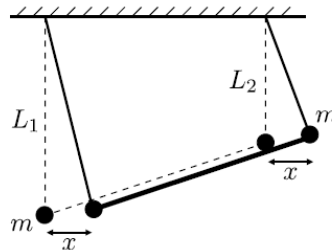


5.5 – сурет.

Шешімі: Кіші тербелістер кезінде бірінші жуықтауда жүктер горизонталь бағытта бірдей $x \ll L_{1,2}$ шамаға ығысады деп есептеуге болады. Себебі оларды байланыстырушы өзекше қатты (5.6-сурет). Әрбір жүктің көтерілу биіктігі келесіге тең:

$$y_{1,2} = L_{1,2} - L_{1,2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{L_{1,2}^2}} \approx \frac{x^2}{2L_{1,2}}$$

Сондықтан тепе-теңдік күйден шығарылған жүктер жүйесінің потенциалдық энергиясының өсімшесі келесіге тең болады:



5.6-сурет.

$$U = mg(y_1 + y_2) = \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) x^2$$

Бірінші жуықтауда жүктердің жылдамдықтары бірдей болады:

$$v_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_{1,2}}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_{1,2}}{dx}\right)^2} \approx \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \frac{x^2}{L_{1,2}^2}} \approx \frac{dx}{dt} = v$$

Сондықтан жүйенің кинетикалық энергиясы:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2$$

Егер бір еркіндік дәрежесіне ие жүйенің кинетикалық энергиясын $W = \alpha v^2/2$ түрде, ал потенциалдық энергиясын $U = \beta x^2/2$ түрде жаза алсақ, мұндағы x - жүйенің орнын сипаттайтын кейбір координата, ал $v = dx/dt$ - оған сәйкесті жылдамдық, онда жүйе гармониялық тербелістерді жасай алады. Мұндай тербелістердің периоды келесі формуламен анықталады:

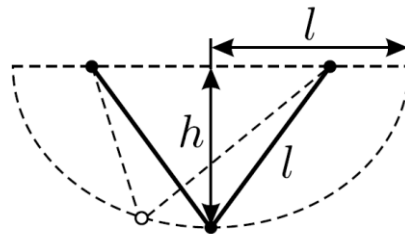
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Сондықтан біздің жағдайда кіші тербелістердің периоды келесіге тең:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{mg\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L_1L_2}{g(L_1 + L_2)}}$$

5.4. Ұштары бірдей биіктікте бекітілген ұзындығы $2l$ жеңіл, созылмайтын жіпке сомын (гайка) кигізілген. Сомынның салмағының әсерінен жіп h шамаға иіледі. Жіптің бойындағы сомынның кіші тербелістерінің T периодын анықтаңыздар. Сомын мен жіптің арасында үйкеліс жоқ.

Шешімі: Сомын қисық сызық бойынша қозғалады. Кез келген моментте жіп ұштарының бекітілген нүктелерінен ара-қашықтықтарының қосындысы тұрақты және $2l$ - ге тең. Мұндай қасиетке эллипс ие. Сондықтан сомынның траекториясы жартылай осьтері l мен h болатын эллипстің доғасы болып келеді (5.7-сурет).



5.7-сурет

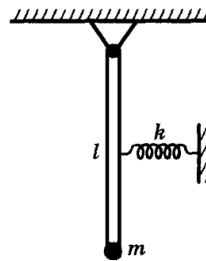
Мұндай эллипсті радиусы $R=l$ шеңберді l/h есе сығу арқылы алуға болады. Эллипстің төменгі нүктесіндегі қисықтық радиусы бұл шеңбердің радиусынан l/h есе артық:

$$R_k = \frac{l^2}{h}$$

Сомын тербелісінің кіші амплитудалары кезінде ол ұзындығы R_k -ға тең математикалық маятник сияқты қозғалады. Сонымен сомынның кіші тербелістерінің периоды:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{gh}}$$

5.5. Егер өзекшенің ортасына қатаңдығы k горизонталь серіппені бекіткенде жеңіл өзекшеде ілініп тұрған жүктің кіші тербелістерінің жиілігі неше есе өзгереді? Өзекше тепе-теңдікте вертикаль жағдайда болады (5.8-сурет).



5.8-сурет.

Шешімі: Серіппе болмаған кезде бұл жағдай тербелістердің жиілігі келесі түрде анықталатын қарапайым математикалық маятник

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Серіппені бекіткен кезде маятникті тепе-теңдік күйден ауытқыту кезінде кері қайтарушы күшті арттырады, соның нәтижесінде тербелістер жиілігі артуы тиіс. Жүйенің тербелістер ν_2 жиілігін табуы үшін жүйенің W толық механикалық энергиясы үшін өрнекті қолданамыз. Жүкті тепе-теңдік күйден $x < l$ шамаға ауытқыту кезінде ол потенциалдық энергияға $mgh = \frac{mgx^2}{2l}$ ие болады. Одан басқа серіппені $\frac{x}{2}$ шамаға ұзартқанда

ол $\frac{k\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$ потенциалдық энергияға ие болады. Кинетикалық энергияны $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x')^2$ ескере отырып, келесіні аламыз.

$$W = \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{m(x')^2}{2} \quad (5.5.1)$$

Ал энергия үшін өрнек

$$W = Ax^2 + B(x')^2 \quad (5.5.2)$$

мұндағы A , B – оң тұрақтылар, ал циклдік жиілік $\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}$ анықталады. Онда (5.5.2) – теңдеуге сәйкес циклдік жиілікті пен тербелістер жиілігін табамыз:

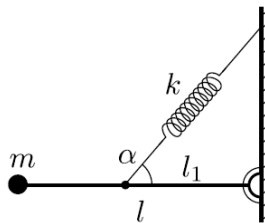
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}; \quad \nu_2 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Сонымен серіппені бекіткеннен кейін тербелістер жиілігі келесі шамаға есе артады:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{kl}{4mg}}$$

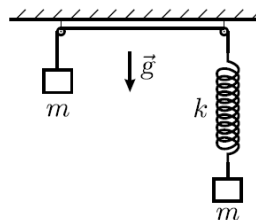
Өз бетімен шығаруға арналған есептер

5.6. Қабырғаға топсалы түрде ұзындығы l салмақсыз өзекшенің ұшында массасы m жүк орналасқан. (5.9-сурет). Өзекше топсадан l_1 ара-қашықтықта бекітілген қатандығы k серіппемен горизонталь жағдайда тепе-теңдікте ұсталады. Серіппе мен өзекше арасындағы бұрыш α . Тепе-теңдік жағдайға қатысты жүктің кіші тербелістерінің жиілігін анықтаңыздар.



5.9-сурет.

5.7. Төмендегі 5.10-суретте көрсетілген жүйеде жүктердің массалары m , серіппенің қатандығы k . Серіппе және жіп салмақсыз, үйкеліс жоқ. Бастапқы сәтте жүктер қозғалыссыз және жүйе тепе-теңдікте болады. Содан кейін сол жақ жүкті ұстап тұрып, оң жақтағы жүкті төмен қарай a ара-қашықтыққа ығыстырады, кейін оларды бастапқы жылдамдықсыз жібере салады. Тербеліс процесінде сол жақ жүктің максималды жылдамдығын табыңыздар. Жіптер үнемі керілген, ал жүктер жүйенің қалған денелерімен соқтығыспайды деп есептеңіздер.

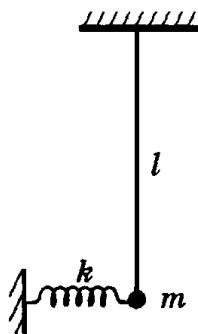


5.10-сурет.

5.8. Ұзындығы L математикалық маятниктің ілу нүктесі горизонталь тербелістер жасайды; бұл жағдайда x координатасы t уақытта $x = a \cdot \cos \omega t$ заңы бойынша өзгереді. Тербелістер кіші деп есептеп, маятниктің еріксіз тербелістерінің амплитудасы мен фазасын анықтаңыздар.

5.9. Әрқайсысының массасы m екі шар қатаңдығы k серіппемен жалғасқан және тегіс горизонталь бетте орналасқан. Мұндай жүйенің өздік тербелістерінің периодын анықтаңыздар.

5.10. 5.11-суретте тербелмелі жүйе (математикалық маятник пен серіппе байланысы) көрсетілген. Жүйенің кіші тербелістерінің T периодын анықтаңыздар.



5.11-сурет